DERIVADAS. APLICACIONES

APLICACIONES

Definición de derivada

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

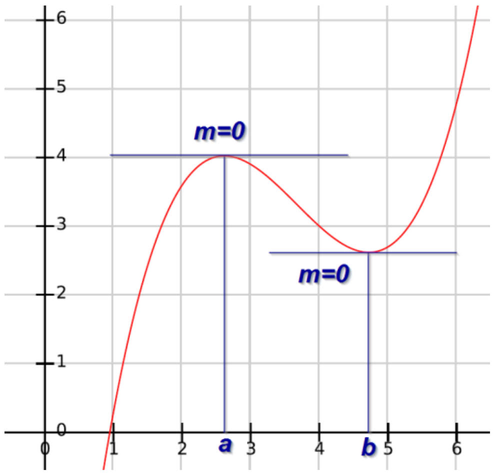
Interpretación geométrica

La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, es decir,

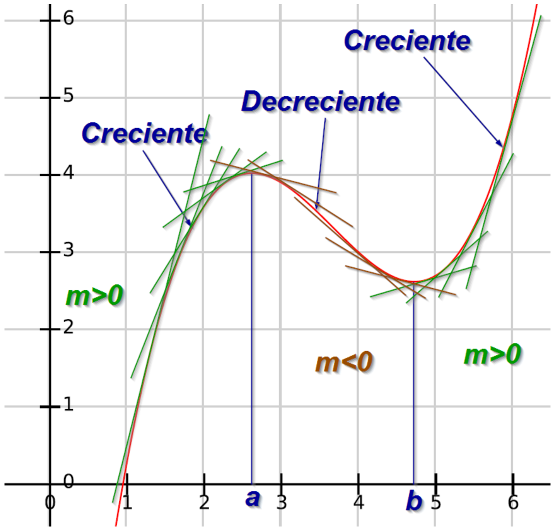
$$\boxed{f'(x_0) = m_{tg\ en\ x=x_0}}$$

Ecuación recta tangente en $P\big(x_0, f(x_0)\big)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Monotonía. Extremos relativos



- $\boldsymbol{Si\ f'(x) > 0 \ \Rightarrow f(x)\ es\ CRECIENTE}$
- $\boldsymbol{Si\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow f(x)\ es\ DECRECIENTE}$
- $\boldsymbol{Si\ f'(x_0) = 0 \ \Rightarrow Posible\ E.R.\ en\ x = x_0}$

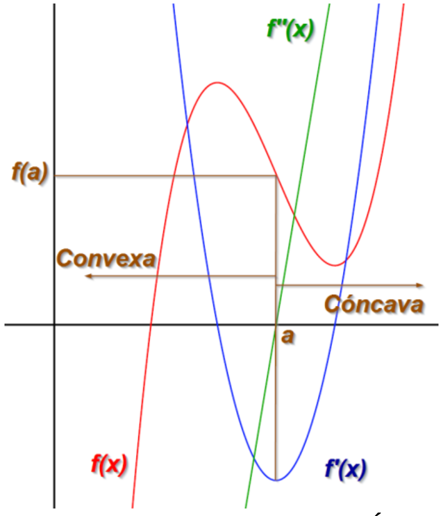
Derivabilidad de una función

Para que una función sea derivable en un punto $x = x_0$ primero **debe ser continua** en ese punto y cumplirse:

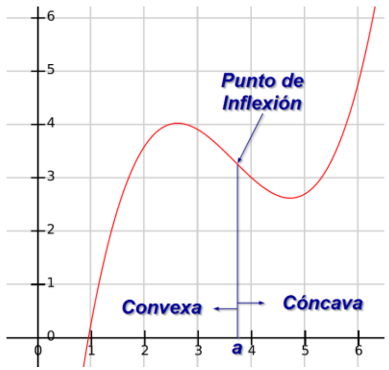
$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

La derivabilidad de una función está estrechamente ligada al dominio de su derivada.

Curvatura. Puntos de inflexión



- $\boldsymbol{Si\ f''(x) > 0 \ \Rightarrow f(x)\ es\ CÓNCAVA}$
- $\boldsymbol{Si\ f''(x) < 0 \ \Rightarrow f(x)\ es\ CONVEXA}$
- $\boldsymbol{Si\ f''(a) = 0 \ \Rightarrow Posible\ P.I.\ en\ x = a}$



Condición de E.R y P.I. ($n \in \mathbb{N}$)

- $\boldsymbol{Si\ f^{2n'}(x_0) < 0 \ \Rightarrow Máximo\ en\ x = x_0}$
- $\boldsymbol{Si\ f^{2n'}(x_0) > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ en\ x = x_0}$
- $\boldsymbol{Si\ f^{(2n+1)'}(a) \neq 0 \ \Rightarrow P.Inf.\ en\ x = x_0}$

FORMULARIO

$f = k \cdot u \qquad f' = k \cdot u'$

$f = u \pm v \qquad f' = u' \pm v'$

$f = k \cdot u \pm c \cdot v \qquad f' = k \cdot u' \pm c \cdot v'$

Regla del Producto:

$f = u \cdot v \qquad f' = u \cdot v' + v \cdot u'$

Regla del Cociente:

$$f = \frac{u}{v} \qquad f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Regla de la Potencia:

$f = v^n \qquad f' = n \cdot v^{n-1} \cdot v'$

$f = k \cdot v^n \qquad f' = k \cdot n \cdot v^{n-1} \cdot v'$

Funciones Exponenciales:

$f = e^u \qquad f' = e^u \cdot u'$

$f = a^u \qquad f' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$

Funciones Logarítmicas:

$$f = \ln(u) \qquad f' = \frac{u'}{u}$$

$$f = \log_a(u) \qquad f' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$$

Una Función elevada a otra Función:

$$f = u^v \qquad f' = u^v \left[v' \cdot \ln(u) + \frac{v \cdot u'}{u} \right]$$

Funciones Trigonométricas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{sen}(u)$	$f' = \cos(u) \cdot u'$
$f = \cos(u)$	$f' = -\operatorname{sen}(u) \cdot u'$
$f = \tan(u)$	$f' = \sec^2(u) \cdot u'$
$f = \csc(u)$	$f' = -\csc(u)\cot(u) \cdot u'$
$f = \sec(u)$	$f' = \sec(u)\tan(u) \cdot u'$
$f = \cot(u)$	$f' = -\csc^2(u) \cdot u'$

Funciones Trigonométricas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arc\,sen}(u)$	$f' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arc\,cos}(u)$	$f' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \arctan(u)$	$f' = \frac{u'}{1+u^2}$
$f = \operatorname{arccsc}(u)$	$f' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$f = \operatorname{arcsec}(u)$	$f' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arccot}(u)$	$f' = -\frac{u'}{1+u^2}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$

Funciones Hiperbólicas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{senh}(u)$	$f' = \cosh(u) \cdot u'$
$f = \cosh(u)$	$f' = \operatorname{senh}(u) \cdot u'$
$f = \tanh(u)$	$f' = \operatorname{sech}^2(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{csch}(u)$	$f' = -\operatorname{csch}(u)\coth(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{sech}(u)$	$f' = -\operatorname{sech}(u)\tanh(u) \cdot u'$
$f = \coth(u)$	$f' = -\operatorname{csch}^2(u) \cdot u'$

Funciones Hiperbólicas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arcsenh}(u)$	$f' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f = \operatorname{arccosh}(u)$	$f' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arctanh}(u)$	$f' = \frac{u'}{1-u^2}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arccsch}(u)$	$f' = -\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}\,;\quad u \neq 0$
$f = \operatorname{arcsech}(u)$	$f' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}\,;\quad 0 < u < 1$
$f = \operatorname{arccoth}(u)$	$f' = \frac{u'}{1-u^2}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$