

Matrices y determinantes

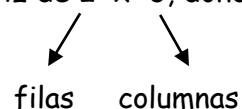
Las matrices y los determinantes son herramientas que facilitan el manejo de datos, se usan mucho en Biología, Ingeniería, Economía, Ciencias Sociales, etc. Un ejemplo de su uso es: una tienda de zapatillas vende dos modelos (A y B). Se venden en lotes de 2, 5 y 10 unidades, con el precio indicado en la tabla:

	2 uds	5 uds	10 uds
Modelo A	40 €	80 €	120 €
Modelo B	30 €	50 €	80 €

Las ventas de cada modelo en un año son:

	Modelo A	Modelo B
2 uds	700	500
5 uds	600	400
10 uds	500	500

¿Sabrías hacer una matriz de 2 x 3, donde se vean las ventas en un año? ¿Y una matriz 3 x 2 que indique los precios?



1 Operaciones con matrices:

Suma y resta de matrices:

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices: ejemplo:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

para multiplicar 2 matrices A y B, el nº de columnas de A debe ser igual al nº de filas de B.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta:

Se obtiene cambiando las filas por las columnas

Ej.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz elevada a una potencia:

$A^2 = A \cdot A$. Para calcular, por ejemplo A^{31} tenemos que calcular $A^2, A^3 \dots$ hasta obtener una matriz con todos unos en la diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, si por ejemplo la hemos obtenido al calcular A^3 , dividimos $31 \div 3 = 10$ resto 1. El resto indica que $A^{31} = A^1$.

2 Determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1)}_8 - \underbrace{(0 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2)}_8$$

3 Cálculo de la matriz inversa usando determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El } |A| \text{ es } 2.$$

OJO Son las matrices 2x2 que se obtienen al tachar la fila y la columna del número correspondiente de la matriz

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} |1 & -3| & \ominus |0 & -3| & |0 & 1| \\ |1 & 0| & |1 & -1| & \ominus |1 & 0| \\ \ominus |0 & -1| & \ominus |1 & -1| & |1 & 0| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

OJO Los términos impares llevan signo -.

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$