Matrices y determinantes

Las matrices y los determinantes son herramientas que facilitan el manejo de datos, se usan mucho en Biología, Ingeniería, Economía, Ciencias Sociales, etc. Un ejemplo de su uso es: una tienda de zapatillas vende dos modelos (A y B). Se venden en lotes de 2, 5 y 10 unidades, con el precio indicado en la tabla:

	2 uds	5 uds	10 uds
Modelo A	40 €	80 €	120 €
Modelo B	30 €	50 €	80 €

Las ventas de cada modelo en un año son:

	Modelo A	Modelo B
2 uds	700	500
5 uds	600	400
10 uds	500	500

¿Sabrías hacer una matriz de 2 x 3, donde se vean las ventas en un año? ¿Y una matriz 3 x 2 que indique lo precios?

filas columnas

1 Operaciones con matrices:

Suma y resta de matrices:

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices: ejemplo:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

para multiplicar 2 matrices A y B, el nº de columnas de A debe ser igual al nº de filas de B.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta:

Se obtiene cambiando las filas por las columnas

Ej.: $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz elevada a una potencia:

$A^2 = A \cdot A$. Para calcular, por ejemplo A^{31} tenemos que calcular A^2, A^3… hasta obtener una matriz con todo unos en la diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, si por ejemplo la hemos obtenido al calcular A^3, dividimos $31 \,\underline{|\,3\,}$. El resto indica que $A^{31} = A^1$.

$1 \quad 10$

2 Determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = \underbrace{(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1)}_{8} - \underbrace{(0 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{8}$$

3 Cálculo de la matriz inversa usando determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\mathrm{Adj}\,(A)^t)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{El } |A| \text{ es } \underline{2}.$$

$0 - (-1 \cdot -3) = -3$

OJO Son las matrices 2x2 que se obtienen al tachar la fila y la columna del número correspondiente de la matriz

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & & \\ & 1 & -3 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \ominus\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \ominus\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

OJO Los términos impares llevan signo -.

$$\mathrm{Adj}\,(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$