Trigonometría explicada en 6 sesiones de trabajo en grupo.

**Sesión 1: Hermenegildo y su rama. Comprensión y uso de seno y coseno.**

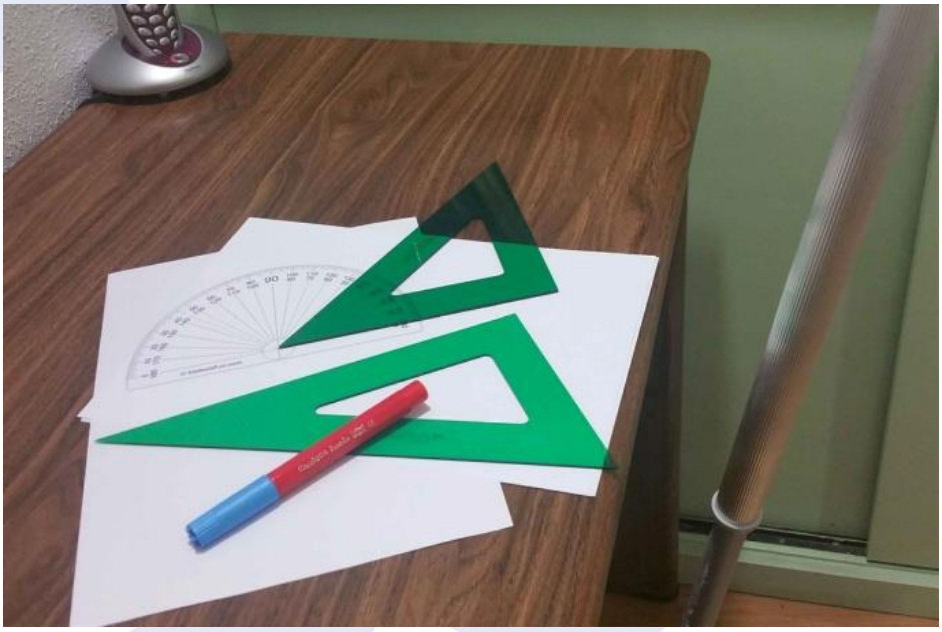
**<u>Fase 1:</u> Estudio de sombra física. Concepto de proyección vertical.**

**Objetivo:**

- Descubrir el concepto de proyección vertical de un tramo de recta (palo/lápiz/rotulador), ya sea sobre una superficie (plano) o sobre una línea (futuro eje de abscisas).
- Explorar la relación entre el ángulo que se forma entre el palo/lápiz/rotulador y la sombra proyectada sobre una superficie.
- Identificar la relación de conceptos matemáticos con la realidad.

**Material:**

- Palo/lápiz/rotulador grueso (para que proyecte bien la sombra) de distintas longitudes.
- Luz cenital.
- Escuadra, cartabón, transportador de ángulos, regla, celofán (para sujetar el rotulador a la escuadra,…).



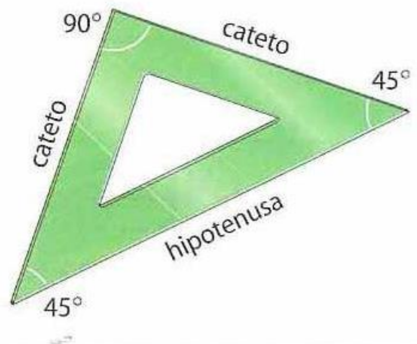


info@comoyporque.es

## Escuadra

La escuadra tiene forma de triángulo rectángulo isósceles, es decir, dos de los lados son iguales y forman un ángulo recto.

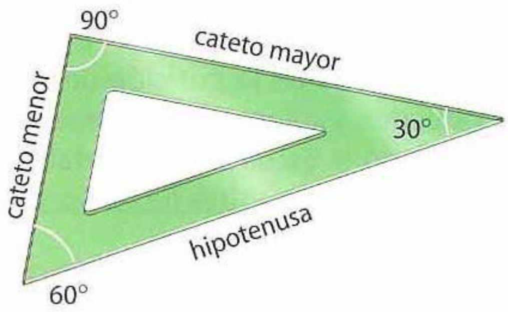
Junto con el cartabón, se usa para trazar rectas paralelas y perpendiculares y para construir ángulos múltiplos de 15° (15°, 30°, 45°, 60°…).




## Cartabón

El cartabón tiene forma de triángulo rectángulo escaleno, es decir, todos sus lados son desiguales. La longitud de la hipotenusa es el doble de la del cateto menor.

Se emplea igual que la escuadra.




**Organización de la clase:**

- Alumnos en grupos de 3 o 4 con acceso a palo y luz. Pueden ver lo que hacen los otros grupos.

**Tiempo de realización:** 50 minutos.

**Consigna:**

Hermenegildo tiene una rama de cerezo y está apasionado. Juega todo el recreo con ella imaginando que es un sable láser, el báculo de Gandalf o la espada de Jon Nieve. El sol del mediodía (en la vertical) cae sobre él y le da igual, y nosotros le observamos...

Como buenos científicos observamos atentamente y vemos que según el ángulo con el que Hermenegildo sostiene la rama proyecta una sombra u otra.



info@comoyporque.es

Ahora experimentad vosotros con estas ramas (palo/lápiz/rotulador). Hoy vamos a descubrir el concepto de proyección vertical sobre una superficie horizontal.

¿De qué depende la longitud de la sombra proyectada?

Cuantificar de forma aproximada la longitud de la sombra proyectada en relación con la longitud de la barra en diferentes situaciones.

**Variables didácticas:**

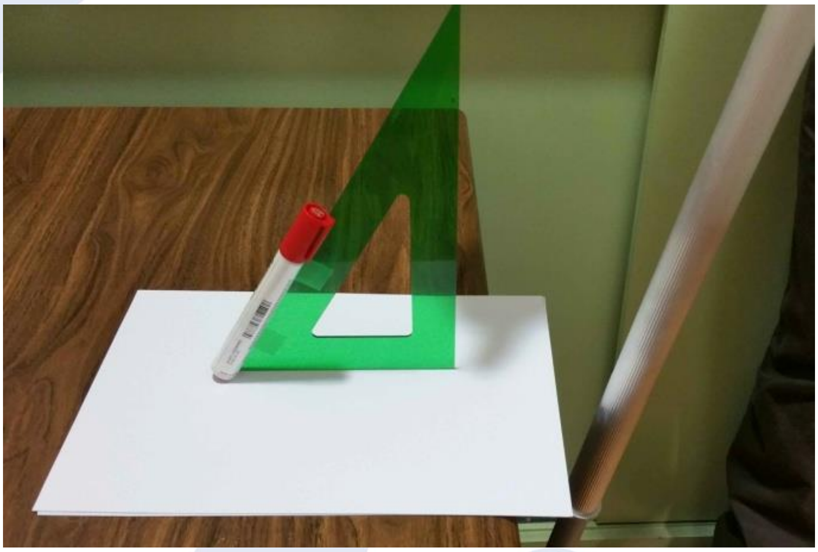
Confirmar que la luz es perpendicular a la superficie, para ello se comprueba con una escuadra y cartabón que la sombra de la barra es un punto.

Barras de diferentes longitudes y formando diferentes ángulos con la superficie horizontal sobre la que se proyecta la sombra.

**Estrategia óptima:**

Apoyar la barra (palo/lápiz/rotulador) sobre la escuadra o cartabón para garantizar la estabilidad y, por tanto, el ángulo durante el proceso de observación.

Expresar la longitud de la sombra como una proporción de la longitud de la barra (palo, lápiz, rotulador).





info@comoyporque.es

**Otras estrategias esperadas:**

- Es posible que inclinen la luz o la superficie para obtener sombras alargadas. Hay que especificar que la luz debe caer perpendicular sobre la superficie.

**Validación:**

Tras realizar un debate dirigido se llega a las siguientes conclusiones:

- La sombra es un puntito cuando se sostiene la rama a 90º
- La sombra es igual que la rama cuando se sostiene en horizontal (0º)
- La longitud de la sombra depende de la longitud del palo y del ángulo con que se sostenga la rama.

**Institucionalización:**

Entonces pasando a lenguaje matemático todo lo que habéis dicho podemos decir que:

Sombra = Rama x Variable que depende del ángulo; es decir, $S = R \cdot v(\alpha)$



info@comoyporque.es

**Fase 2: Adaptación a lenguaje matemático. Coseno.**

**Objetivo:**

- Calcular (midiendo) y dibujar la función coseno.
- Descubrir que las relaciones matemáticas son tangibles.

**Material:**

- Transportador, escuadra, cartabón, regla, celofán.
- Hoja con circunferencia con el eje de abscisas graduado según la longitud de la barra (el radio sería la unidad, y se correspondería con la longitud de la barra) y tablas para rellenar.
- Rotuladores gruesos (para que proyecten bien la sombra) de distintas longitudes.
- Luz cenital.
- Pizarra.

**Organización de la clase:**

- Los mismos grupos de la fase anterior.

**Tiempo de realización:** 50 minutos.

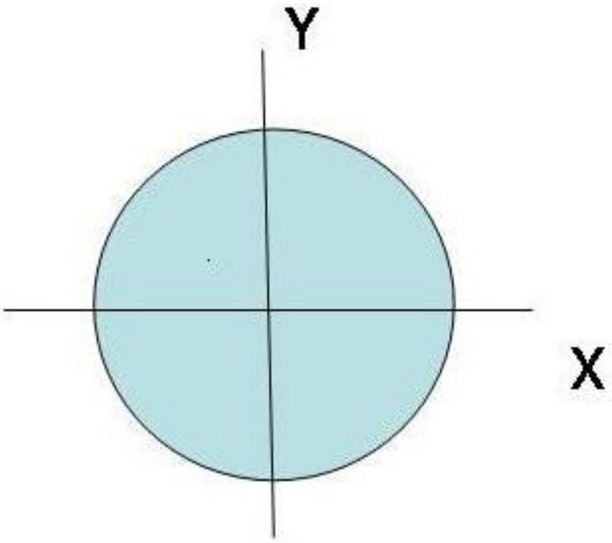
**Consigna**

Bueno ya tenemos una fórmula $S = R \cdot v(\alpha)$ donde "S" es la longitud de la sombra y "R" la longitud de la rama. Nos falta por conocer la función $v(\alpha)$ es decir, esa variable dependiente del ángulo con el que Hermenegildo sostiene la rama.

Pobre Hermenegildo, se está poniendo rojo del calor; vamos a ver esto rápido.



info@comoyporque.es




Sobre el eje de coordenadas que tenéis dibujado (coincidente con un radio del círculo) vais a representar las proyecciones para diferentes ángulos en los dos cuadrantes superiores (la barra deberá ir girando desde estar apoyada sobre la superficie hasta ponerse vertical para después seguir girando en el mismo sentido hasta volver a quedar apoyada sobre la superficie).

**Variables didácticas:**

El hecho de que la circunferencia no tuviera un radio unidad dificultaría  la comprensión del concepto matemático coseno.

**Estrategia óptima:**

LLamar a la longitud de la barra 1, de modo equivalente al radio de la circunferencia goniométrica. De ese modo, la longitud de cada sombra es una proporción de la longitud total, que se corresponde con el propio coseno.

Establecer unos ejes cartesianos de modo que la inclinación de la barra siempre se haga sobre el eje x para facilitar la correlación entre la longitud de la sombra y el ángulo de la barra sobre el suelo.

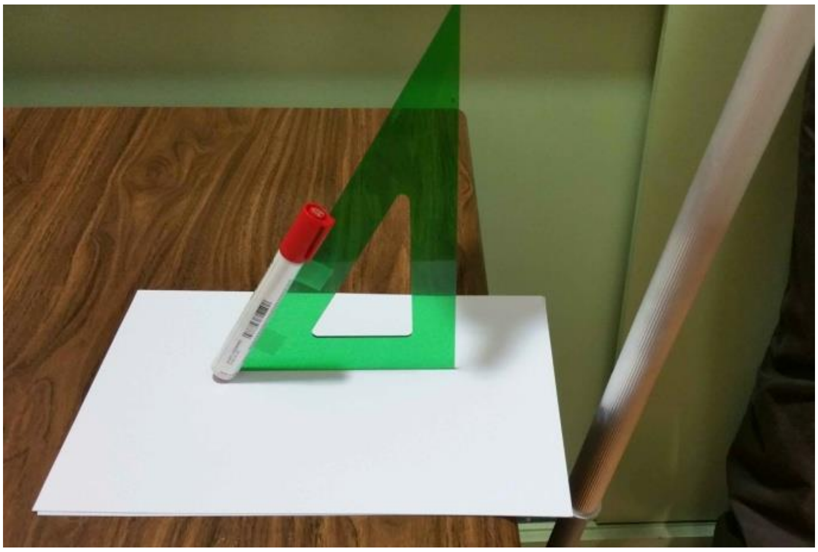
Confirmar que la luz es perpendicular a la superficie, para ello con una escuadra o cartabón se comprueba que la sombra de la barra es un punto.

- Dibujar los ángulos asignados, proyectar la sombra gráficamente sobre el eje X y medir con la regla la distancia al origen (en negativo si corresponde).
- El ángulo se mide desde la superficie (eje de abscisas) hacia la barra, mientras dicho ángulo es inferior o igual a 90 grados, a partir de dicho ángulo se determina restándolo a 180º.
- Utilizar la escuadra y el cartabón para garantizar la estabilidad del ángulo durante la experimentación.
- No hay que olvidar que la unidad de longitud es la de la barra y que se requiere hacer proporciones para reflejar los resultados correspondientes a estados intermedios a la graduación realizada.

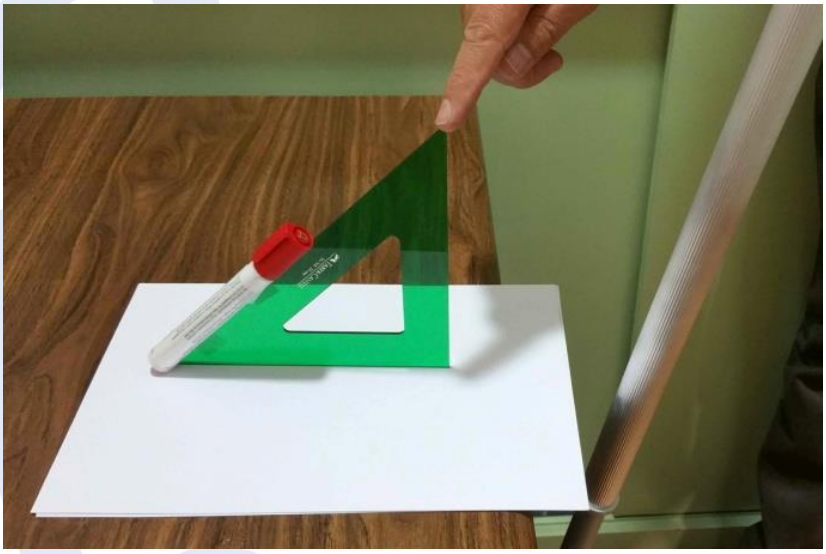
*Comprobando que la luz es cenital, formando por tanto un ángulo de 90º con la horizontal.*



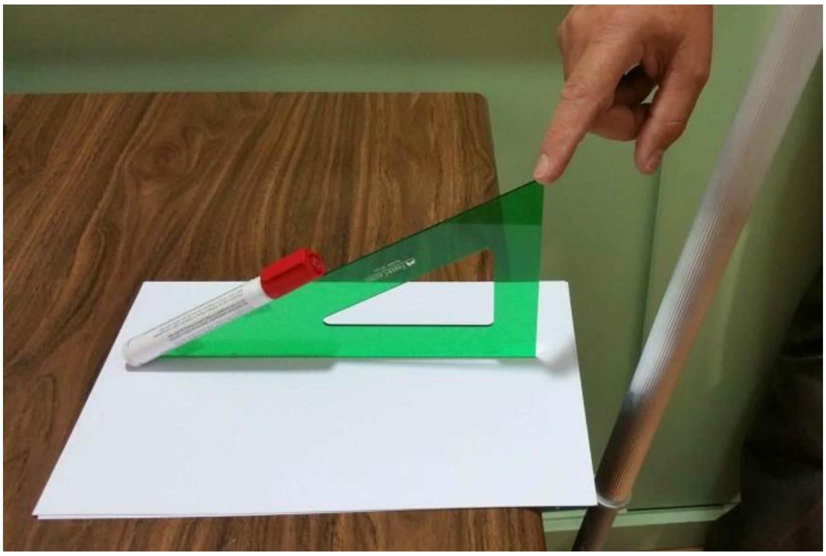
info@comoyporque.es



*Situación de cálculo sobre el cartabón, formando un ángulo de 60 º con la horizontal.*



*Situación de cálculo con el rotulador sobre el lado mayor de la Escuadra, formando un ángulo de 45º sobre la horizontal.*



*Situación de cálculo con el rotulador sobre el lado mayor del cartabón, formando un ángulo de 30º sobre la horizontal.*

*Situación de cálculo formando un ángulo de 0º con la horizontal (apoyado sobre el eje de abscisas).*

**Otras estrategias esperadas:**

Realizar la sombra girando sobre otros ejes que no sean el de abscisas

No constatar que el ángulo de incidencia de la luz es perpendicular a la superficie de representación.

Medir sombras sin tener en cuenta que la unidad de longitud es la de la propia barra.

**Validación:**

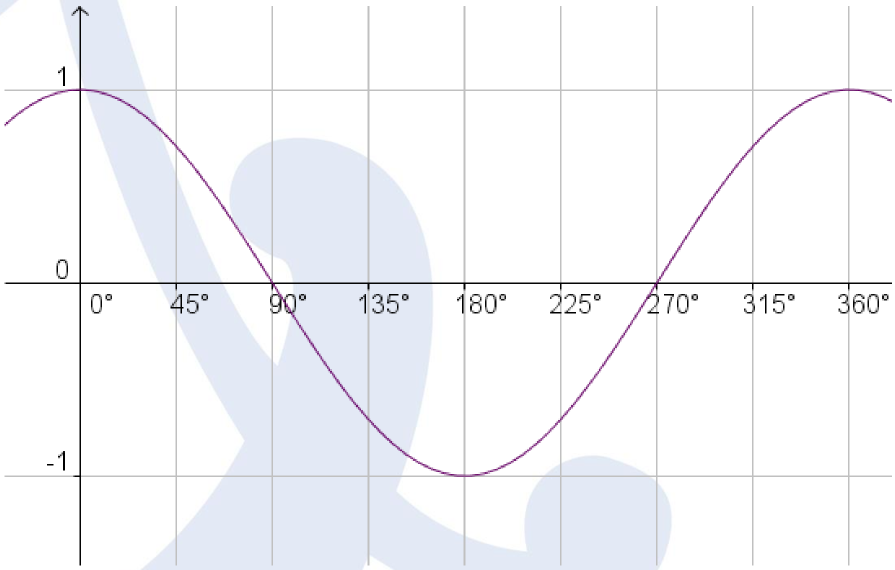
Se pregunta los resultados a cada grupo, si hay algún resultado incorrecto se explica el fallo para todos.

Uniendo los resultados de cada grupo en la pizarra se obtiene:

| Ángulo | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(\alpha)$ | 1,00 | 0,86 | 0,71 | 0,50 | 0,00 | -0,50 | -0,71 | - 0,86 | -1,00 |

Vamos a representar esto en una gráfica (se dibuja en la pizarra).

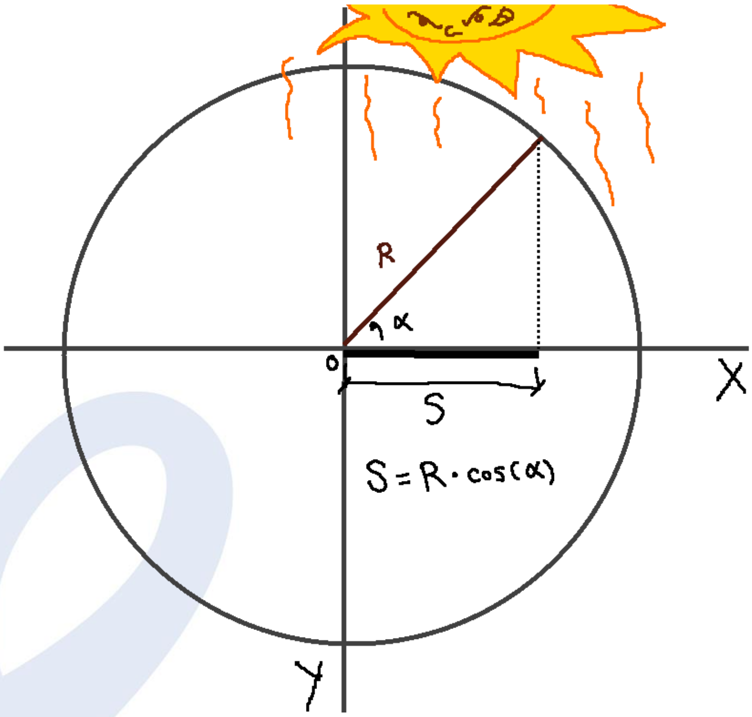
Se extrapola el resultado para ángulos entre 180º y 360º, haciendo referencia a su valor positivo/negativo según nos encontremos en el eje de abscisas a la derecha del de ordenadas o a su izquierda.



**Institucionalización**

Bueno muchachos, juntos hemos descubierto la función COSENO, ya podemos decirle a Hermenegildo que descanse.

Así que ya sabemos que la sombra "S" de cualquier segmento con un vértice en el origen de coordenadas es su longitud por el coseno del ángulo que forma con el eje x.



<u>**Sesión 2:**</u>

<u>**Fase 3:**</u> **Investigación. Concepto de proyección vertical. Seno.**

**Objetivo:**

- Descubrir el concepto de proyección horizontal siguiendo el proceso deductivo ya aprendido.
- Dibujar la función seno.

**Material:**

- Transportador, escuadra, cartabón, regla.
- Hoja con circunferencia con el eje de abscisas graduado según la longitud de la barra (el radio sería la unidad, y se correspondería con la longitud de la barra) y tablas para rellenar.
- Palos gruesos (para que proyecten bien la sombra) de distintas longitudes.
- Luz horizontal (flexos, linternas…).

**Organización clase:**

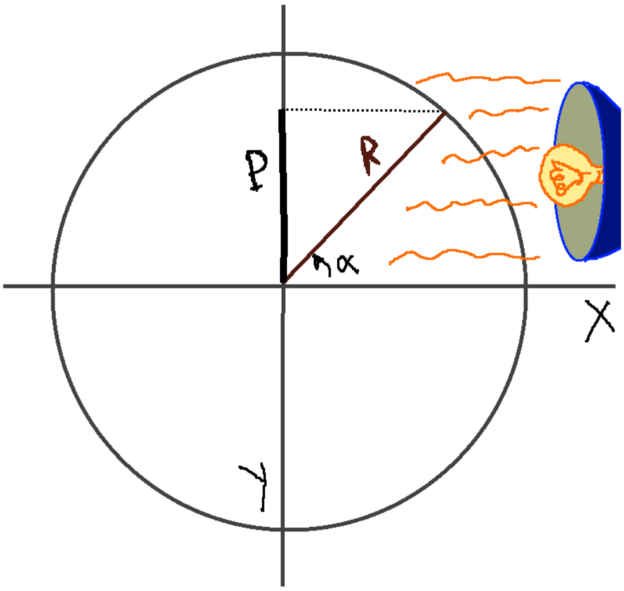
- Los mismos grupos de la fase anterior.
- El profesor irá rotando por los grupos ayudando. Si es necesario hará aclaraciones para todos en la pizarra.

**Tiempo de realización:** 50 minutos

**Consigna:**

Descubrir la similitud entre este ejercicio y el anterior, tanto en relación al proceso deductivo como en los resultados obtenidos.

Comparad los resultados obtenidos con los resultados del ejercicio anterior.




Hay que descubrir la fórmula que relaciona R con P en función de $sen(\alpha)$ y su valor para cada uno de los ángulos anteriores.

**Variables didácticas:**

El hecho de que la circunferencia no tenga un radio unidad dificultará el trabajo y la comprensión del concepto matemático coseno.

Establecer unos ejes cartesianos de modo que la inclinación de la barra siempre se haga sobre el eje y para facilitar la correlación entre la longitud de la sombra y el ángulo de la barra sobre la superficie vertical.

**Estrategia óptima.**

Repetir las deducciones y pasos de la fase anterior

**Otras estrategias esperadas:**

Realizar la sombra girando sobre otros ejes que no sean el de ordenadas.

No constatar que el ángulo de incidencia de la luz es perpendicular a la superficie de representación.

Medir sombras sin tener en cuenta que la unidad de longitud es la de la propia barra.

**Validación:**

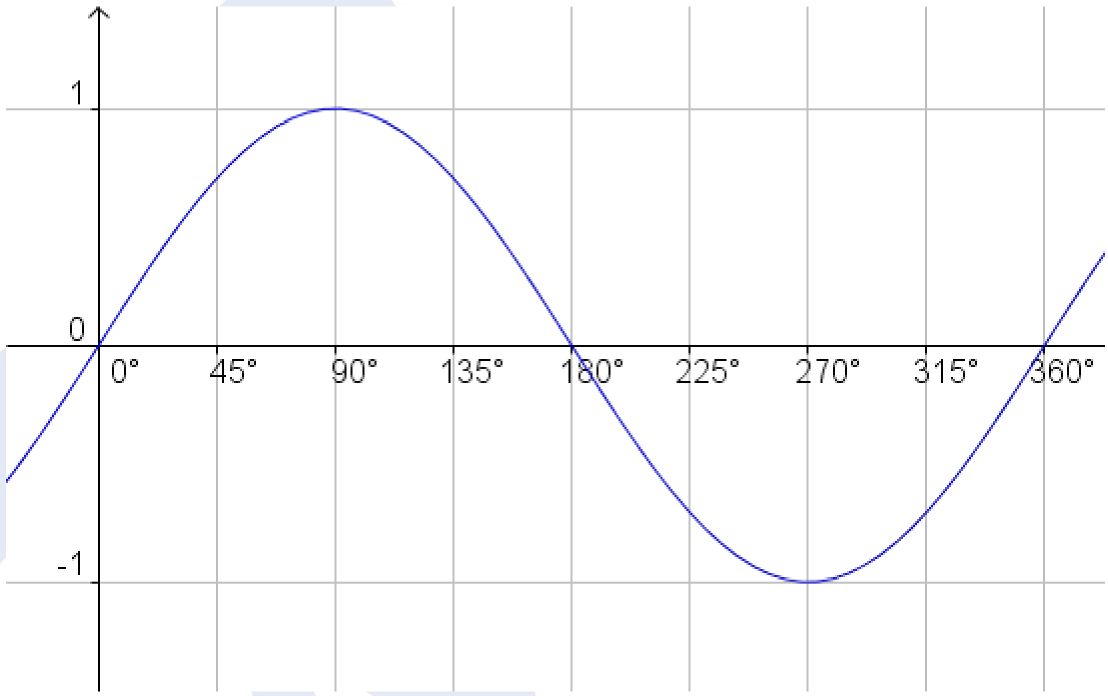
Se pregunta los resultados a cada grupo, si hay discrepancias se permite el debate y explicar lo que se ha hecho en la pizarra. Los resultados deben ser:

$P = R \cdot sen(\alpha)$

Uniendo los resultados de cada grupo en la pizarra se obtiene:

| Ángulo | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sen(\alpha)$ | 0,00 | 0,50 | 0,71 | 0,86 | 1,00 | 0,86 | 0,71 | 0,50 | 0,00 |

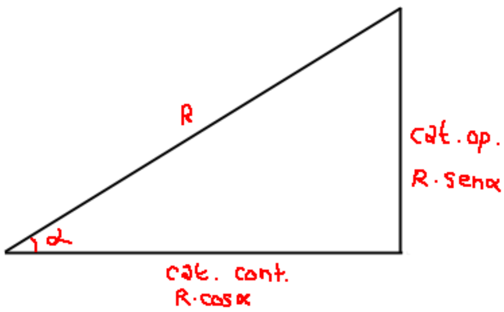
Se extrapola el resultado para ángulos entre 180° y 360°, haciendo referencia a su valor positivo/negativo según nos encontremos en el eje de ordenadas sobre el eje de abscisas o bajo el mismo.




**Institucionalización**

Ya conocemos las dos funciones trigonométricas básicas: el SENO y el COSENO. Sabemos lo que significan y sus valores.

Gracias al descubrimiento de Hermenegildo ya sabemos calcular el "cateto opuesto" y el "cateto contiguo" de un triángulo rectángulo respecto de un ángulo "$\alpha$" y la longitud de su hipotenusa. Hacer una reflexión para generalizar los resultados obtenidos cuando la longitud de la barra (hipotenusa del triángulo rectángulo) es "R", frente a la unidad hasta ahora considerada.



**Sesión 3: Tangente y relación fundamental.**

**Fase 4: La pendiente.**

**Objetivo:**

- Clarificar el concepto de pendiente y llevarlo a la realidad.
- Reforzar los conceptos de seno y coseno de la lección anterior.

**Material:**

Pizarra

Resultados de los ejercicios anteriores

**Organización de la clase:**

- Alumnos en sus pupitres en debate abierto. Si les llama el profesor pueden salir a usar la pizarra para explicar sus aportaciones.

**Tiempo de realización:** 50 minutos.

**Consigna:**

Hay otra función trigonométrica que también se rige por el ángulo e indica la **pendiente** que produce cierto ángulo. Y… ¿Qué es la pendiente? Vamos a debatirlo y descubrirlo entre todos.

¿Dónde habéis oído la palabra pendiente? ¿Habrá más pendiente en una colina o en el Everest? ¿Por qué? ¿Cómo podríamos expresar eso en una fórmula? ¿Puede haber pendientes negativas? ¿Cuál sería la pendiente mínima? ¿Y la máxima? ¿Y en función de seno y coseno?

**Variables didácticas:**

Diferentes triángulos con los ángulos y rectángulos con los senos y cosenos correspondientes.

Los signos de las pendientes.

Ángulos de la escuadra (pendiente del 100 %) y el cartabón.

**Estrategia óptima:**

Dividir los senos entre cosenos.

**Otras estrategias esperadas:**

Puede haber un bloqueo al aparecer en los denominadores el valor 0.

**Validación:**

Tras realizar un debate dirigido se llegan a las siguientes conclusiones:

- La pendiente (llevada al plano cotidiano) es una relación entre cuánto subes (eje Y) y cuánto avanzas (eje X). De hecho a veces la pendiente se indica en % (ejemplo 2 por ciento, que quiere decir que subes 2 metros cuando recorres 100).
- Cuanto mayor sea el ángulo (entre 0 y 90) mayor es la pendiente. Explicación gráfica de pendientes negativas (según el sentido de los ejes cartesianos).
- Para un ángulo 0, la pendiente es 0; para catetos iguales la pendiente es 1, para un ángulo recto la pendiente es infinita.
- Al igual que las otras funciones trigonométricas NO es dimensional (no varía en función del tamaño del triángulo).
- Reflexionar sobre los ángulos correspondientes a cada cuadrante.

**Institucionalización:**

Introducción del concepto tangente.

Entonces pasando a lenguaje matemático todo lo que habéis dicho podemos decir que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ contiguo} = pendiente$$

| Ángulo | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sen(\alpha)$ | 0,00 | 0,50 | 0,71 | 0,866 | 1,00 | 0,866 | 0,71 | 0,50 | 0,00 |
| cos($\alpha$) | 1,00 | 0,866 | 0,71 | 0,50 | 0,00 | -0,50 | -0,71 | -0,86 | -1,00 |
| tg($\alpha$) | 0 | 0,58 | 1,00 | 1,73 | ∞ | -1,73 | -1 | -0,58 | 0 |



info@comoyporque.es

**Fase 5: Pitágoras y la relación fundamental.**

**Objetivo:**

- Relacionar contenidos aprendidos previamente.
- Fomentar la curiosidad y la investigación.
- Determinar la relación fundamental de la trigonometría.

**Material**

Pizarra

**Organización de la clase:**

- Alumnos en equipos de 4 formados por el profesor para que estén equilibrados.

**Tiempo de realización:** 50 minutos.

**Consigna:**

Bueno, Pitágoras estableció hace mucho tiempo la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y en estas clases hemos visto la relación de las funciones seno y coseno con los catetos ¿Creéis que podemos encontrar una relación entre estas dos funciones aprovechándonos de Pitágoras? Adelante, porque este va a ser un arma muy importante para vuestro entendimiento de todo lo demás y lo vais a descubrir vosotros.

**Variables didácticas**

Triángulos rectángulos diversos.

**Estrategia óptima**

Asignar a cada cateto su valor en función de la hipotenusa y el ángulo que forma con la base. Así, el cateto de la base sería la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo y el cateto opuesto sería la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo.

Aplicar seguidamente el Teorema de Pitágoras simplificando por el valor de la hipotenusa, confirmando que el resultado no depende de la misma.



info@comoyporque.es

**Otras estrategias esperadas**

Asignar valores concretos a catetos para ángulos ( triángulos) determinados. Ello únicamente permitirá la comprobación del Teorema de Pitágoras pero impide su generalización en función del ángulo.

**Validación:**

- Despejando en el teorema de Pitágoras en función de una hipotenusa R queda la relación fundamental de la trigonometría.

**Institucionalización:**

Entonces pasando a lenguaje matemático todo lo que habéis dicho podemos decir que:

$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ (señalar que no depende de R)

**Fase 6: Descubrimiento analítico de los valores populares de seno y coseno.**

**Objetivo:**

- Reforzar el concepto geométrico del seno y el coseno.
- Demostrar la unión del lenguaje matemático y la realidad geométrica.

**Material**

Pizarra

**Organización de la clase:**

- Alumnos en equipos de 4 formados por el profesor para que estén equilibrados.

**Tiempo de realización:** 50 minutos.

**Consigna:**

Ahora vais a descubrir que todas estas cosas funcionan de verdad, y lo vais a ver vosotros, con vuestra lógica. Os voy a pedir que me demostréis analíticamente los valores de seno, coseno y tangente de los ángulos 30, 45 y 60 (que ya hemos calculado midiendo con regla). Para ello os doy dos pistas:

- Revisad las fórmulas que ya habéis deducido, para su aplicación a cada caso particular.
- Los ángulos de un triángulo equilátero son siempre 60… ya lo sabéis pero os lo recuerdo.

Así que debatid, encontrad y demostrad.

**Variables didácticas**

Triángulo rectángulo con vértices de 45°.

Triángulo equilátero partido por la mitad, para reflejar el ángulo de 30°

**Estrategia óptima**

Identificar el triángulo rectángulo adecuado para determinar analíticamente el seno y coseno correspondientes.

Utilizar nomenclaturas para los lados de los triángulos que faciliten el descubrimiento analítico (en el triángulo equilátero dividido por la mitad la hipotenusa se denomina L y el cateto menor correspondiente al ángulo recto se denomina L/2).

Observar la coincidencia entre los valores de seno de 30° y coseno de 60°.

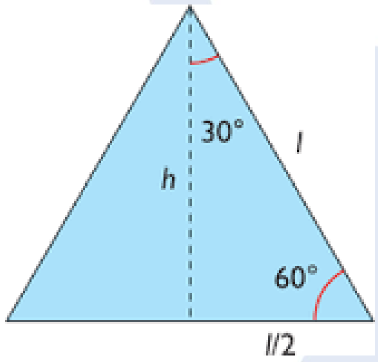
Observar la coincidencia entre los valores de coseno de 30° y seno de 60°.

**Otras estrategias esperadas**

No identificar las relaciones evidentes : en triángulos rectángulos con vértices a 45°los catetos son iguales, y en triángulos equiláteros divididos por la mitad el cateto menor, correspondiente al ángulo recto, tiene la mitad de la longitud de la hipotenusa ( lado del triángulo).

**Validación:**

- Ambos se deducen aplicando el teorema de Pitágoras ya sea sobre un triángulo rectángulo con vértices de 45° (para determinar el seno y el coseno de 45°) y sobre medio triángulo equilátero (vértices 60°-30°, para determinar los senos y cosenos de 30 y 60).




*Triángulo equilátero dividido por la mitad*

Ejemplo: Calcular el seno de 60°

$l^2 = h^2 + (l/2)^2$; $h= \sqrt{3}/2\ l$; $h=$ sen $60°\ l$; sen$60°=\sqrt{3}/2$

**Institucionalización:**

Vemos que los valores coinciden con los obtenidos gráficamente y además os dejo una regla mnemotécnica para que no los olvidéis.

| X= | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| SenX | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| CosX | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| TanX=SenX/CosX | 0 | $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$ | $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}} = ! \approx \infty$ |



info@comoyporque.es